Lösung zur Diplomprüfung Herbst 2007

Prüfungsfach

Statik

Klausur am 27.08.2007

Name: ______________ Vorname: ______________ Matrikelnummer: ______________
(bitte deutlich schreiben) (9stellig!)

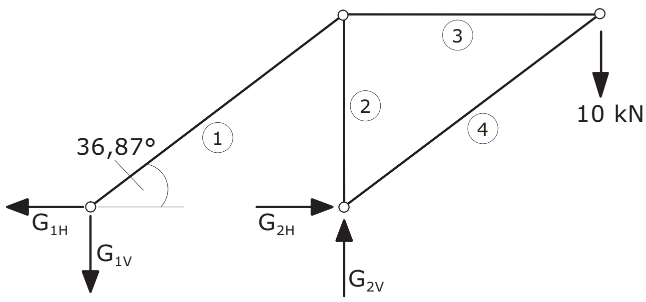
Aufgabe	~~1~~	~~2~~	~~3~~	4	5	6	7	8	9	Summe
mögliche Punkte	~~20~~	~~5~~	~~5~~	25	25	25	25	25	25	120
erreichte Punkte										

Wichtige Hinweise

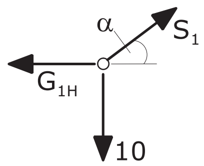
- Dauer der Klausur: 3 Stunden, davon
  30 Minuten für Aufgaben ohne Hilfsmittel,
  2 Stunden 30 Minuten für Aufgaben mit Hilfsmitteln.
- Prüfen Sie, ob alle Aufgabenblätter vorhanden sind.
- Schreiben Sie auf das Deckblatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer.
- Geben Sie bei den Aufgaben, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind, Ihre Lösungen auf den Aufgabenblättern an. Bei Bedarf können Sie weiteres farbiges Schreibpapier anfordern. Verwenden Sie hierfür kein eigenes Papier.
- Die Aufgabenblätter zu den Aufgaben, die mit Hilfsmitteln zu bearbeiten sind, sind zusammen mit den zugehörigen Lösungen abzugeben.
- Keine grünen Stifte verwenden.
- Die Lösungen sollen alle Nebenrechnungen und Zwischenergebnisse enthalten.
- Programmierbare Rechner nur ohne Programmteil benutzen.
- Die Benutzung Programmgesteuerter Rechner (z.B Notebooks, Laptops) ist nicht zulässig.
- Mobiltelefone sind während der Klausur abzuschalten und dürfen nicht benutzt werden.
- Toilettenbesuche sind nur einzeln unter Hinterlegung des Studentenausweises bei den Aufsichtspersonen gestattet.
- Keine Gleichungssysteme mit mehr als zwei Unbekannten lösen.

Musterlösung Aufgabe 4 (25 Punkte)

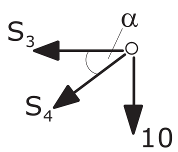
a) Fachwerksystem:



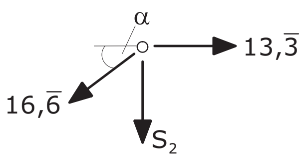
$$
\begin{aligned}
\sum M_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot 8 = G_{2v} \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{G_{2v} = 20\,kN} \\
\sum V &= 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{G_{1v} = 10\,kN} \\
\sum H &= 0 \quad \Rightarrow \quad G_{1H} = G_{2H}
\end{aligned}
$$



$$S_1 \cdot \sin\alpha = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_1 = 3,6\,kN}$$
$$S_1 \cdot \cos\alpha = G_{1H} \quad \Rightarrow \quad \underline{G_{1H} = 13,\overline{3}\,kN}$$



$$S_4 \cdot \sin\alpha = -10 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_4 = 16,\overline{6}\,kN}$$
$$S_4 \cdot \cos\alpha = -S_3 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_3 = 13,\overline{3}\,kN}$$

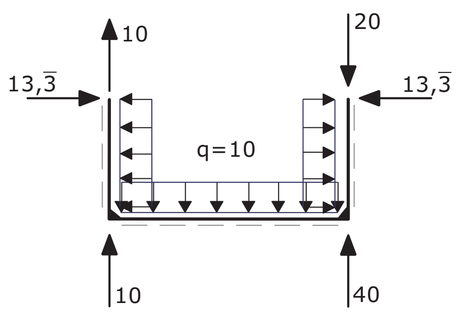


$$16,\overline{6} \cdot \sin\alpha = -S_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{S_2 = -10\,kN}$$
$$16,\overline{6} \cdot \cos\alpha - 13,\overline{3} = 0 \quad \surd$$

Auflager:

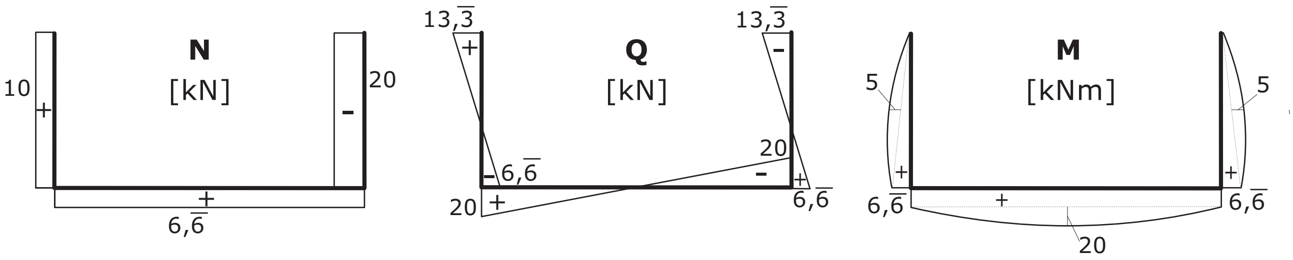
$$
\begin{aligned}
\underline{A_H} &= \underline{0} \\
\sum M_A &= 0 \quad \Rightarrow \quad B \cdot 4 - F \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = 40\,kN} \\
\sum V &= 0 \quad \Rightarrow \quad 40 - 10 - 10 \cdot 4 + A_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A_V = 10\,kN}
\end{aligned}
$$

Trograhmen:

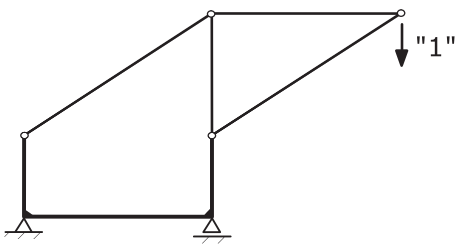


Schnittgrößen:

Fachwerksystem: Q, M = 0, N = Stabkräfte $S_1 - S_4$

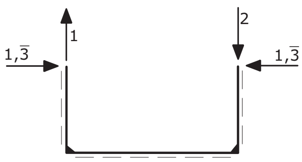


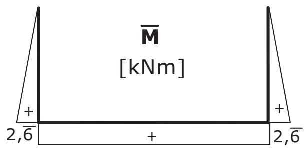
b) **Verschiebung des Knotens s:**



Stabkräfte $= \overline{S_i} = \frac{S_i}{10}$

Gelenkkräfte $= \overline{G_i} = \frac{G_i}{10}$





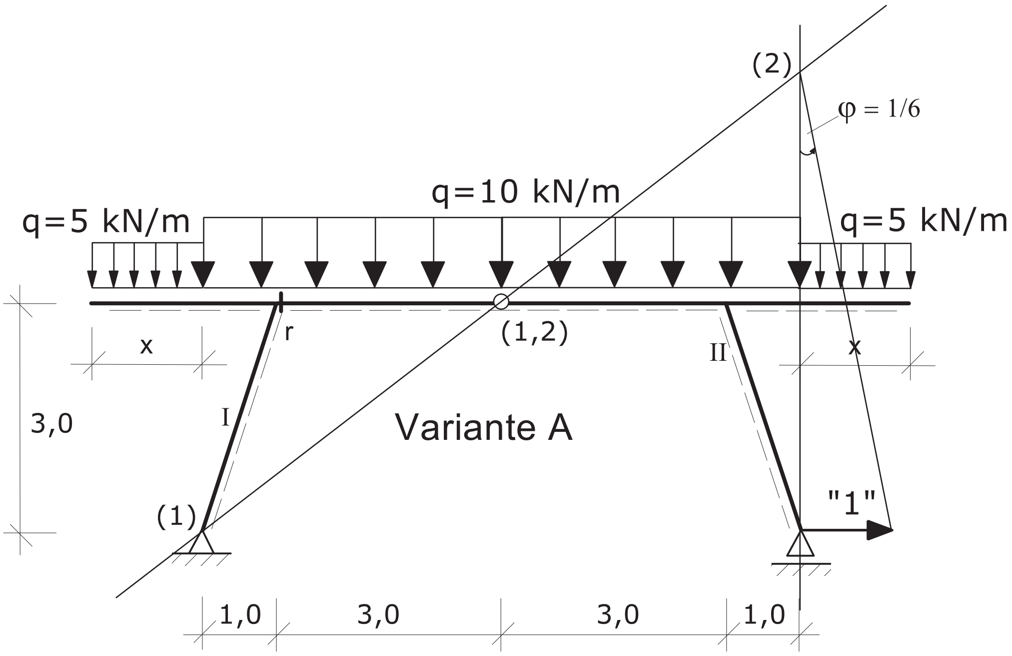
$$EI\,\delta_s = EI \cdot \tfrac{S_1}{10} \cdot \alpha_T \cdot T \cdot 5 + \left[\tfrac{1}{3} \cdot 6,\overline{6} \cdot 2,\overline{6} \cdot 2 + \tfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 2,\overline{6} \cdot 2\right] \cdot 2$$
$$+2,\overline{6} \cdot 6,\overline{6} \cdot 4 + \tfrac{2}{3} \cdot 2,\overline{6} \cdot 20 \cdot 4$$
$$= 150 + 41,48 + 71,11 + 142,22 = 404,80\,kNm^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\delta_s = 4,04\,mm}$$

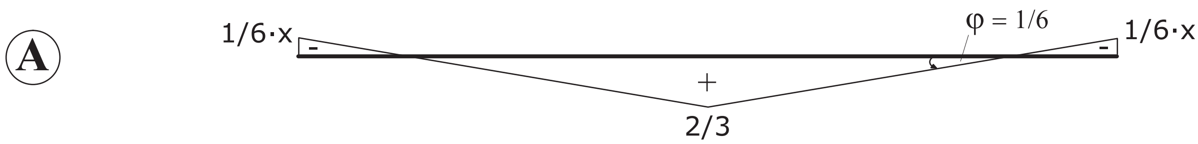
c)

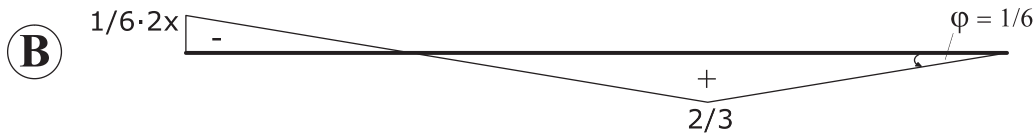
$$EI\,\delta_s = 404,80 + EI\left(\tfrac{16,\overline{6}^2}{EA\cdot 10} \cdot 5 + \tfrac{10^2}{EA\cdot 10} \cdot 3 + \tfrac{13,\overline{3}^2}{EA\cdot 10} \cdot 4 + \tfrac{16,\overline{6}^2}{EA\cdot 10} \cdot 5\right)$$
$$= 404,80 + 757,78$$
$$= 1162,6\,kNm^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\delta_s = 11,6\,mm}$$

Musterlösung Aufgabe 5 (25 Punkte)

a)





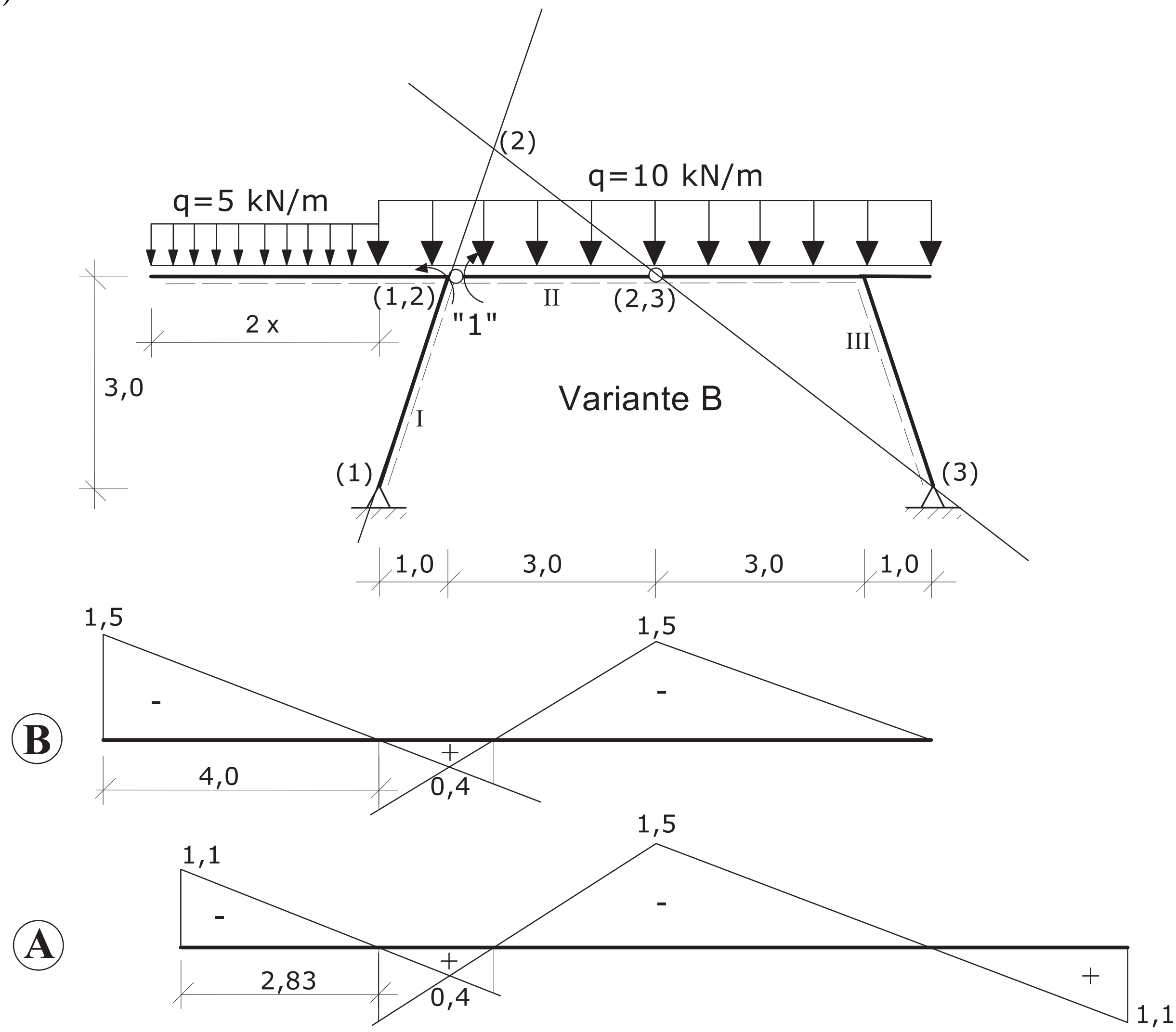


A $\quad H = 20 \;=\; -\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \frac{1}{6}\cdot x\cdot x\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot \frac{2}{3}\cdot 8 \;\Rightarrow\; \underline{x = \sqrt{8} \approx 2,83\,m}$

B $\quad H = 20 \;=\; -\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{6}\cdot 2x\cdot 5\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot \frac{2}{3}\cdot 8 \;\Rightarrow\; \underline{x = \sqrt{4} = 2,0\,m}$

$\Rightarrow$ Variante **B** ist vorzuziehen, da $1,40 \le x = 2,0 \le 2,40\,m$!

b)



$$\underline{\mathbf{B}} \qquad M_r = -\tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 1,5\cdot 6,4 + \tfrac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 10\cdot 1,6 - \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 1,5\cdot 4 = \underline{-59,8\,kNm}$$

$$\underline{\mathbf{A}} \qquad M_r = \tfrac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 1,6\cdot 10 - \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 1,5\cdot 6,4 = \underline{-44,8\,kNm}$$

Musterlösung Aufgabe 6 (25 Punkte)

a) Das System ist 1-fach statisch unbestimmt. Als statisch Überzählige wird die Stabkraft des Stabes 5 gewählt.

Nullzustand (X_1=0)
N2 = N3 = 0
N1 = N4 = N6 = N7 = -5$\sqrt{2}$ = -7,07

Einheitszustand (X_1=1)
N6 = N7 = 0
N1 = N4 = -1/$\sqrt{2}$
N2 = N3 = 1/$\sqrt{2}$
N5 = 1

Verformungsberechnung
$\mathrm{EA}\delta_{10} = -2 \cdot 2,83 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 7,07 \ = \ -28,30$
$\mathrm{EA}\delta_{11} = 4 \cdot 1 \cdot 1 \ + \ 4 \cdot 2,83 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \ = \ 9,66$

Kompatibilitätsbedingung
$\delta_{10} \ + \ X_1 \cdot \delta_{11} \ = \ 0$
$$X_1 \ = \ -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{28,30}{9,66} \ = \ 2,93$$

Nachlaufrechnung
$N = N^0 \ + \ X_1 \cdot N^1$
N1 = N4 = -5 kN
N2 = N3 = -2,07 kN
N5 = 2,93 kN
N6 = N7 = -7,07 kN

b) Verformung w_z
$EAw_z = \Sigma\,(N_0^n)^2/P$
$=2 \cdot 2,83 \cdot 7,07^2/10 \ + \ 4 \cdot 2.93^2/10 \ + \ 2 \cdot 2,83 \cdot 5^2/10 \ + \ 2 \cdot 2,07^2 \cdot 2,83/10$
= 48,30

Musterlösung Aufgabe 7 (25 Punkte)

- ng = 2

- Festhaltekraftgrößen
  $M_i^{30} = EI\alpha_t \Delta T/h = 0,4$
  $M_k^{30} = -EI\alpha_t \Delta T/h = -0,4$
  $M_i^{40} = Pl/8 = 5,0$
  $M_k^{40} = -Pl/8 = -5,0$

- Steifigkeiten
  $k_{ik}^1 = \frac{2EI}{l} = 2667$
  $k_{ik}^2 = \frac{3EI}{2l} = 2000$
  $k_{ik}^3 = \frac{2EI}{l} = 1333$
  $k_{ik}^4 = \frac{2EI}{l} = 2000$
  $k_{ik}^5 = \frac{3EI}{2l} = 2121$
  $k_{ik}^6 = \frac{3EI}{2l} = 2121$

- Knotengleichgewicht Knoten 3
  $\Sigma M_3 = 0$
  $M_k^1 + M_i^3 + M_k^5 + M_i^6 = M^*$
  $M_i^{30} + k_{ik}^1(2\varphi_3) + k_{ik}^3(2\varphi_3 + \varphi_4) + k_{ik}^5(2\varphi_3) + k_{ik}^6(2\varphi_3) = 15$
  $(2k_{ik}^1 + 2k_{ik}^3 + 2k_{ik}^5 + 2k_{ik}^6) \cdot \varphi_3 + k_{ik}^3 \cdot \varphi_4 = 14,6$
  $16484\varphi_3 + 1333\varphi_4 = 14,6$

- Knotengleichgewicht Knoten 4
  $\Sigma M_4 = 0$
  $M_k^2 + M_k^3 + M_i^4 + M\varphi = 0$
  $M_i^{30} + M_i^{40} + (k_{ik}^2\, 2\varphi_4) + k_{ik}^3(2\varphi_4 + \varphi_3) + k_{ik}^4\, 2\varphi_4 + c_\varphi \varphi_4 = 0$
  $1333\varphi_3 + 10866\varphi_4 = -4,6$

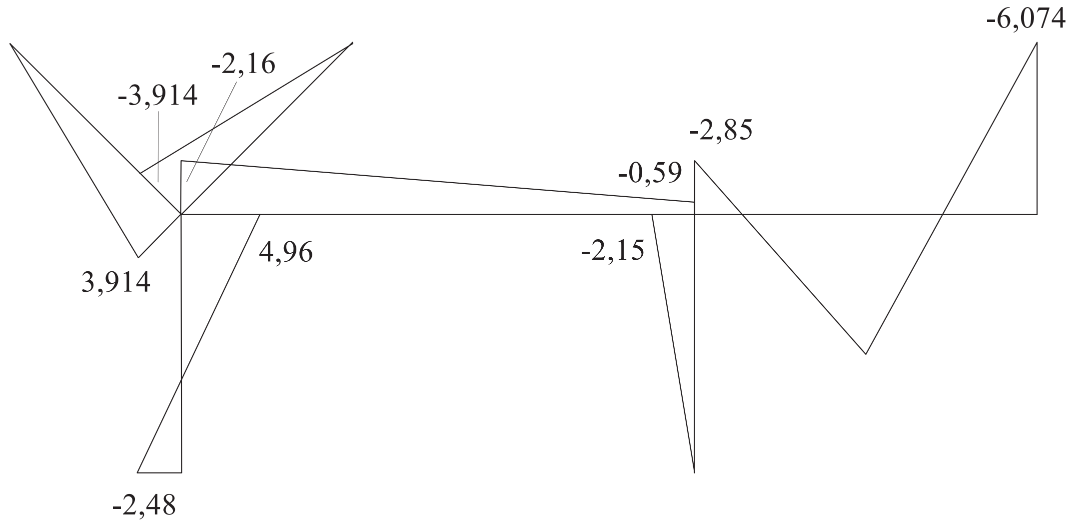
- Matrix und Lösung

$$\begin{bmatrix} 16484 & 1333 \\ 1333 & 10866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,6 \\ -4,6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,29 \cdot 10^{-4} \\ -5,37 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

- Nachlauf

$M_i^1 = k_{ik}^1 \cdot \varphi_3 = 2,48 \Rightarrow -2,48$
$M_k^1 = k_{ik}^1 \cdot 2\varphi_3 = 4,96$
$M_k^2 = k_{ik}^2 \cdot 2\varphi_4 = -2,15$
$M_i^3 = M_i^{30} + k_{ik}^3 \cdot (2\varphi_3 + \varphi_4) = 2,16 \Rightarrow -2,16$
$M_k^3 = M_k^{30} + k_{ik}^3 \cdot (\varphi_3 + 2\varphi_4) = -0,593$
$M_i^4 = M_i^{40} + k_{ik}^4 \cdot (2\varphi_4) = 2,85 \Rightarrow -2,85$
$M_k^4 = M_k^{40} + k_{ik}^4 \cdot (\varphi_4) = -6,074$
$M_k^5 = k_{ik}^5 \cdot 2\varphi_3 = 3,941$
$M_i^6 = k_{ik}^6 \cdot 2\varphi_3 = 3,941 \Rightarrow -3,941$



Musterlösung Aufgabe 8 (25 Punkte)

a) geometr. Randbedingungen

$w(0,y) = 0 = C \cdot 0^2 \cdot y^2$

$\frac{\partial w}{\partial x}(0,y) = 0 = 2C \cdot 0 \cdot y^2$

$\frac{\partial w}{\partial y}(0,y) = 0 = 2C \cdot 0^2 \cdot y$

$w(x,0) = 0 = C \cdot x^2 \cdot 0^2$

$\frac{\partial w}{\partial x}(x,0) = 0 = 2C \cdot x \cdot 0^2$

$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = 0 = 2C \cdot x^2 \cdot 0$

b) Scheibenschnittgrößen

$n_x = 0$

$n_{xy} = n_{yx} = 0$

$n_y = -\lambda \cdot q$

c) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2Cy^2$

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2Cx^2$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 4Cxy$

$\overline{W} = \overline{W}^i - \overline{W}^e = 0$

$$\overline{W} = K \int_A 4C\overline{C}y^4 + 32C\overline{C}x^2y^2 + 4C\overline{C}x^4 + \nu(4C\overline{C}x^2y^2 - 32C\overline{C}x^2y^2 + 4C\overline{C}x^2y^2)dA + \int_A n_y 4C\overline{C}x^4y^2 dA = 0$$

$$\Rightarrow K(\frac{4}{5} \cdot 10^6 + \frac{32}{9} \cdot 10^6 + \frac{4}{5} \cdot 10^6 - \nu\frac{24}{9} \cdot 10^6) = \lambda\, q\, \frac{4}{15} \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{15K}{4q \cdot 10^2} \cdot \left(\frac{8}{5} + \frac{32 - 24\nu}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 70,53$$

d) $s_k = 2l$

$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 0,013$

$P_{k,1} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{s_k^2} = 9638,28$

$\lambda_{k,1} = 9,64 < \lambda_k$

Musterlösung Aufgabe 9 (25 Punkte)

a) $\overline{W} = \overline{W}^i - \overline{W}^e = 0$

$$\int_0^l (M\overline{\kappa} + S\overline{\varepsilon})dx + N_F \cdot \overline{w}\left(\frac{l}{2}\right) - 0 = 0$$

$$\int_0^l (EIw''\overline{w}'' - \lambda P_0 w'\overline{w}')dx + c_F \cdot w\left(\frac{l}{2}\right)\overline{w}\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

b) geometrische RB:
w(0) = 0
w'(0) = 0
w(l) = 0
w'(l) = 0

Polynomansatz:

$$h_i(x) = x\left(\frac{x}{l}\right)^i \cdot \left(\frac{l-x}{l}\right)^2$$

$$h_i'(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^i \cdot \left(\frac{l-x}{l}\right)^2 \cdot (1+i) = 2\frac{x}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^i\left(\frac{l-x}{l}\right)$$

$h_i(0) = 0$
$h_i'(0) = 0$
$h_i(l) = 0$
$h_i'(l) = 0$

c) $(K_F)_{ij} = c_F \cdot h_i\left(\frac{l}{2}\right) \cdot h_j\left(\frac{l}{2}\right)$

$$h_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{16}$$

$$h_2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l}{32}$$

$$K_F = c_F \cdot l^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{256} & \frac{1}{612} \\ \frac{1}{612} & \frac{1}{1024} \end{bmatrix}$$

d) untere Schranke:

$$P_{k1} = \frac{\pi^2 EI}{s_k^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 39,48\frac{EI}{l^2}$$

obere Schranke:

$$P_{k1} = \frac{\pi^2 EI}{0,35^2 \cdot l^2} = 80,57\frac{EI}{l^2}$$